1. Situations problèmes :

- Lors d'une sortie, une classe de 2nde commande dans un bar, 9 cafés et 6 cocas pour un total de 21 €. Une deuxième commande de 5 cafés et 10 cocas revient à 25 €. Foued voudrait connaître le prix des consommations. Il appelle x le prix d'un café et y le prix d'un coca.

- Sur une facture d'électricité, on relève les consommations suivantes : 980 kWh en « heures creuses » et 710 kWh en « heures pleines », pour un montant de 128,10 €.
  Sur une deuxième facture, on relève les consommations suivantes : 490 kWh en « heures creuses » et 550 kWh en « heures pleines », pour un montant de 83,55 €.
  Déterminez le prix x du kWh en « heures creuses » et celui y du kWh en « heures pleines »

2. Mise en équation :

Pour la première commande il obtient l'équation : $9x + 6y = 21$

Pour la deuxième commande il obtient l'équation : $5x + 10y = 25$

Ces deux équations doivent être vérifiées <u>simultanément</u>. Elles forment un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 9x + 6y = 21 \\ 5x + 10y = 25 \end{cases}$$

Il existe 3 méthodes pour résoudre un tel système.

3. Méthode par addition ou combinaison :

$$\begin{cases} 9x + 6y = 21 & (a) \\ 5x + 10y = 25 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x + 2y = 5 & (b) \end{cases}$$

On divise chaque nombre de (a) par 3 et chaque nombre de (b) par 5.
On simplifie l'écriture des équations.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ -x - 2y = -5 & (b) \end{cases}$$

On multiplie chaque membre de (b) par -1.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ 2x + 0y = 2 & (b) \end{cases}$$

On ajoute membre à membre (a) et (b), cette nouvelle équation ne contient plus qu'une inconnue: x. On réécrit (a).

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x = \dfrac{2}{2} & (b) \end{cases}$$

On achève la résolution de (b).

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \times 1 + 2y = 7 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans (a). On réécrit (b).

$$\begin{cases} 3 + 2y = 7 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

On achève la résolution de (b).

$$\begin{cases} 2y = 7 - 3 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 4 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{2} = 2 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

Le couple solution du système est le couple (1 ; 2)

Retenons :
On multiplie les deux membres d'une équation (ou des deux) par un coefficient judicieusement choisi de façon à faire disparaître une inconnue par addition des deux équations.

4. Méthode de résolution par substitution :

$$\begin{cases} 9x + 6y = 21 & (a) \\ 5x + 10y = 25 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x + 2y = 5 & (b) \end{cases}$$

On divise chaque nombre de (a) par 3 et chaque nombre de (b) par 5.
On simplifie l'écriture des équations.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

En transposant ainsi le x dans (b), on obtient son expression en fonction de y.

$$\begin{cases} 3(5 - 2y) + 2y = 7 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

Dans (a) on remplace par son expression trouvée à l'étape précédente.
L'équation (a) ne contient plus qu'une seule inconnue: y

$$\begin{cases} 15 - 6y + 2y = 7 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

On résout l'équation (a) et on réécrit l'équation (b) à chaque fois.

$$\begin{cases} -6y + 2y = 7 - 15 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y = -8 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-8}{-4} & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} y = 2 & (a) \\ x = 5 - 2y & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 & (a) \\ x = 5 - 2 \times 2 & (b) \end{cases}$$

On remplace dans (b) y par la valeur trouvée à l'étape précédente.

$$\begin{cases} y = 2 & (a) \\ x = 1 & (b) \end{cases}$$

On calcule la valeur de x.

Le couple (1 ; 2) vérifie **simultanément** les deux équations : c'est **le couple solution du système**.

On peut écrire aussi : **S = {(1 ; 2)}.**

Conclusion : Un café coûte donc 1 € et un coca 2 €.

Retenons :
Exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une équation,
reporter l'expression obtenue dans l'autre équation,
résoudre l'équation du premier degré à une inconnue ainsi obtenue,
en déduire la valeur de l'autre inconnue.

Remarque :
On peut vérifier que la solution trouvée est la bonne : on remplace x et y par les valeurs trouvées.

$9x + 6y = 9 \times 1 + 6 \times 2 = 9 + 12 = 21$
$5x + 10y = 5 \times 1 + 10 \times 2 = 5 + 20 = 25$

Conclusion : on retrouve les prix des commandes. La résolution est juste.

5. Méthode de résolution graphique

$$\begin{cases} 9x + 6y = 21 & (a) \\ 5x + 10y = 25 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (a) \\ x + 2y = 5 & (b) \end{cases}$$

On divise chaque nombre de (a) par 3 et chaque nombre de (b) par 5.
On simplifie l'écriture des équations.

$$\begin{cases} 2y = 7 - 3x & (a) \\ 2y = 5 - x & (b) \end{cases}$$

Dans (a) et (b), on exprime y en fonction de x. (étapes C et D)

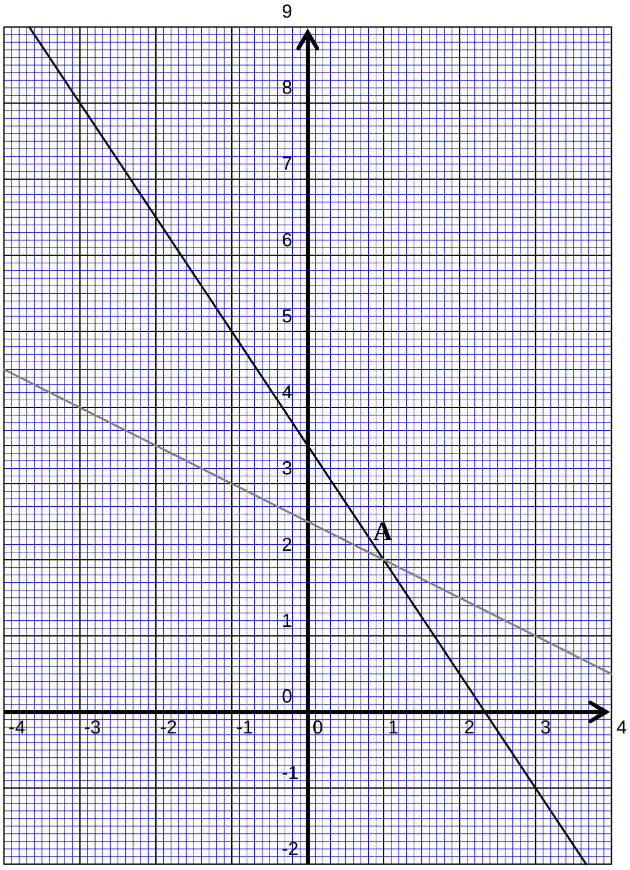
$$\begin{cases} y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x & (a) \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x & (b) \end{cases}$$

On obtient les équations de 2 droites.

On construit un tableau de valeur pour chaque équation de droite :

x	**- 3**	**0**	**3**
$y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$	$\frac{16}{2} = 8$	$\frac{7}{2} = 3.5$	$-\frac{2}{2} = -1$

x	**- 3**	**0**	**3**
$y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{5}{2} = 2.5$	$\frac{2}{2} = 1$



On trace les deux droites. Leur intersection est le point A (1 ;2).

Le couple solution du système est le couple (1 ; 2)

Retenons :
On détermine graphiquement les coordonnées du point d'intersection des droites qui ont pour équations celles du système. Ces coordonnées forment le couple solution du système.
La solution est donnée par les coordonnées x et y du point d'intersection des droites.

6. Cas particuliers :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$