2.3 Du premier au second degré

1. Nature de l'équation :

Une équation du 2nd degré s'écrit de la forme **$ax^2 + bx + c = 0$**

où *a*, *b* et *c* sont des coefficients réels avec *a* non nul et *x* désigne l'inconnue. Résoudre cette équation revient à trouver les solutions ou racines de cette équation.

- si b = 0, l'équation est équivalente à :

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$si\ c > 0\ il\ n'ya\ pas\ de\ solutions$$

$$si\ c < 0\ il\ y\ a\ 2\ solutions: x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Exemple : $2x^2 - 4 = 0$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

- si c = 0, l'équation est équivalente à

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$il\ y\ a\ 2\ solutions\ x = 0\ et\ x = \frac{-b}{a}$$

Exemple : $4x^2 + 3x = 0$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

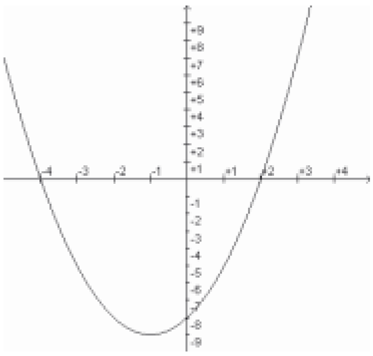
- Si b$\neq 0\ et\ c \neq 0$ Il faut appliquer les méthodes de **résolution algébrique ou graphique** suivantes.

2. Résolution graphique de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

On pose alors la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$,

On peut représenter graphiquement la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$,

les solutions de l'équation sont les **abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.**

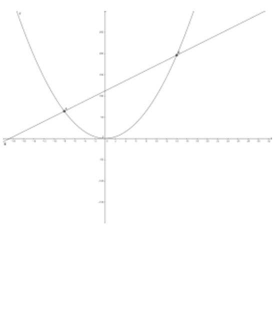


<u>Remarque</u> (voir activité sur pochette commerciale) :

On peut aussi écrire l'équation sous la forme $ax^2 = -b\,x - c$

avec $y = ax^2$ l'équation d'une parabole et $y = -b\,x - c$ l'équation d'une droite.

Les solutions de l'équation sont les ***abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = ax^2$ avec la droite d'équation $y = -b\,x - c$.***



3. <u>Résolution algébrique :</u>

- **Identification des coefficients a, b et c dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$**

  a est le coefficient placé devant x^2,

  b est le coefficient placé devant x,

  c est le coefficient placé tout seul.

<u>Exemples :</u>

Equations	Valeur de a	Valeur de b	Valeur de c
$5x^2 + 2x - 6 = 0$			
$x^2 - 5x + 10 = 0$			
$-x^2 + x - 1$			
$-2x^2 + 8 = 0$			
$-1{,}5x^2 - 8x = 0$			
$x^2 + 8x + 16 = 0$			

- **Calcul du discriminant Δ (delta)** $\Delta = b^2 - 4ac$

Attention : $(-3)^2 \neq -3^2$

<u>Exemples :</u>

Equations	a	b	c	$\Delta = b^2 - 4ac$
$5x^2 + 2x - 6 = 0$				
$x^2 - 5x + 10 = 0$				
$-x^2 + x - 1$				
$-2x^2 + 8 = 0$				
$-1{,}5x^2 - 8x = 0$				
$x^2 + 8x + 16 = 0$				

- **Recherche des solutions de l'équation**

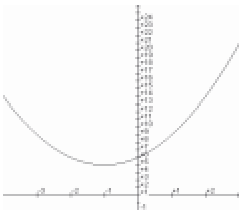
1er cas $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution

<u>Exemple :</u>

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$

Puisque Δ est négatif, l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$ n'a pas de solution.



2ème cas $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

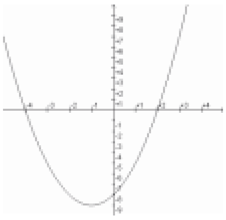
Exemple :

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$\Delta = (2)^2 - 4\text{x}1\text{x}(-8) = 4 + 32 = \mathbf{36}$$

Puisque **Δ est positif**, l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$ admet **deux solutions.**

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$



Remarque : les **solutions** de l'équation sont également appelées **racines**.

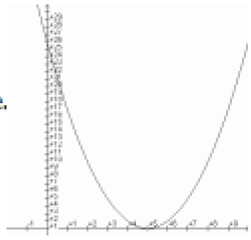
3ème cas $\Delta = 0$, l'équation admet une solution « double » : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Exemple :

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$\Delta = (-10)^2 - 4\text{x}1\text{x}25 = 100 - 100 = \mathbf{0}$$

Puisque **Δ est nul**, l'équation $x^2 - 10x + 25 = 0$ admet **une solution double.**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2\times 1} = \frac{10}{2} = 5$$



Application :

Equations	a	b	c	Δ	Solutions
$5x^2 + 2x - 6 = 0$					
$x^2 - 5x + 10 = 0$					
$-x^2 + x - 1$					
$-2x^2 + 8 = 0$					
$-1{,}5x^2 - 8x = 0$					
$x^2 + 8x + 16 = 0$					
$x^2 + 7x + 12 = 0$					
$x^2 + 2x + 5 = 0$					

4. Factorisation d'un polynôme du second degré

Si $\Delta \geq 0$, on peut factoriser un polynôme du second degré. Il faut d'abord connaître la (ou les) racines du polynôme. On applique ensuite la formule suivante :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemples :

- $x^2 - 10x + 25 = 0$

Peut-on factoriser le polynôme $x^2 - 10x + 25$?

$\Delta = (10)^2 - 4\text{x}1\text{x}25 = 100 - 100 = 0$

Puisque **Δ est nul**, le polynôme $x^2 - 10x + 25$ admet une solution double.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2\times1} = \frac{10}{2} = 5$$

On peut factoriser le polynôme : $\mathbf{x^2 - 10x + 25 = (x-5)(x-5)}$

- $3x^2 + 6x - 24 = 0$

Peut-on factoriser le polynôme $3x^2 + 6x - 24$?

$\Delta = (6)^2 - 4\text{x}3\text{x}(-24) = 36 + 288 = 324 = 18^2$

Puisque **Δ est positif**, le polynôme $x^2 + 2x - 8$ admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{324}}{2\times3} = \frac{-6+18}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{324}}{2\times3} = \frac{-6-18}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

On peut factoriser le polynôme : $\mathbf{3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)}$

- $x^2 + 7x + 12 = 0$, *deux solutions $x_1 = -3$ et $x_2 = -4$,*

  la forme factorisée est donc ……………………………………………………….

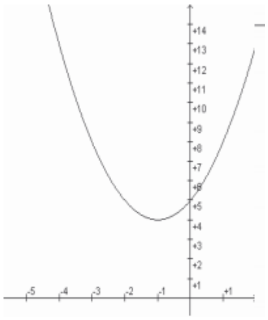
…….

- $2x^2 + 2x - 12 = 0$, *deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$,*

  la forme factorisée est donc …………………………………………………………

…….

5. Signe du trinôme du second degré



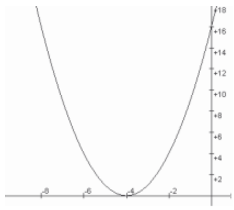
$\Delta < 0$, pour tout x réel, le polynôme est du signe de "a"

Exemples

$x^2 + 2x + 5 = 0$ [delta = −16 ; a = 1 (>0)] → $x^2 + 2x + 5 > 0$

$-x^2 + x - 1 = 0$ [delta = −3 ; a = −1 (<0)] → $-x^2 + x - 1 < 0$

$\Delta = 0$, pour tout x réel, le polynôme est du signe de "a" : a $(x - x_0)^2$



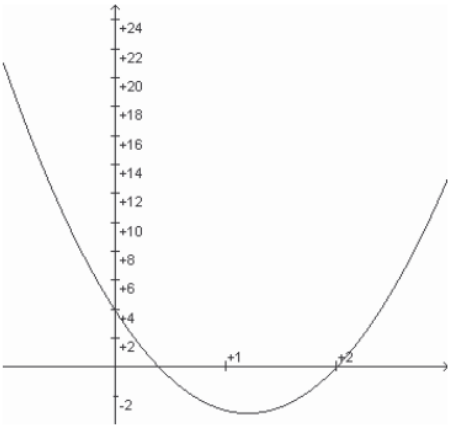
Exemple

$x^2 + 8x + 16 = 0$ [delta = 0 ; a = 1 (>0)] → $x^2 + 8x + 16$ est toujours > 0

$\Delta > 0$, pour tout réel, le polynôme est du signe de « _a » entre les racines et du signe de « a » à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		—	0	+		+	
$(x - x_2)$		—		—	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	—	0	+	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de "a"	0	Signe de "−a"	0	Signe de "a"	

Exemples



Signe de $5x^2 - 12x + 4$ sur ℝ

Résolution de $5x^2 - 12x + 4 = 0$

a = 5 ; b = –12 ; c = 4.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 5 \times 4 = 144 - 80 = 64$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + \sqrt{64}}{2 \times 5} = \frac{12 + 8}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - \sqrt{64}}{2 \times 5} = \frac{12 - 8}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Factorisation de $5x^2 - 12x + 4$:

$$5x^2 - 12x + 4 = 5 \times (x - 2)(x - 0{,}4)$$

Etude du signe de $5x^2 - 12x + 4$:

x	$-\infty$		0,4		2		$+\infty$
$(x - 2)$		–		–	0	+	
$(x - 0{,}4)$		–	0	+		+	
$(x - 2)(x - 0{,}4)$		+	0	–	0	+	
5 $\times (x - 2)(x - 0{,}4)$		+	0	–	0	+	

$5x^2 - 12x + 4$ positif (> 0) pour : $x \in\ ]-\infty\ ; 0{,}4[\ \cup\ ]2\ ; +\infty[$

$5x^2 - 12x + 4$ négatif (< 0) pour : $x \in [0{,}4\ ; 2]$

Signe de $-4x^2 + 11x - 6$ sur $\mathbb{R}$

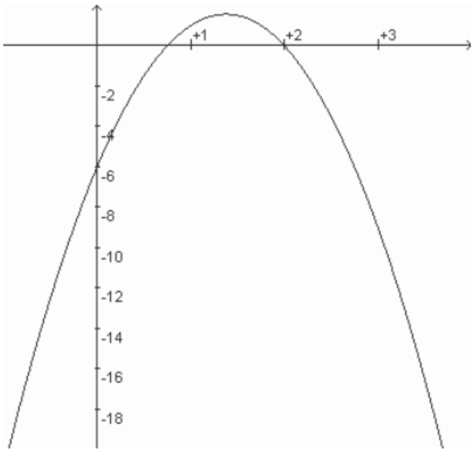
Résolution de $-4x^2 + 11x - 6 = 0$

a = –4 ; b = 11 ; c = –6.

$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \times (-4) \times (-6) = 121 - 96 = 25$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = \frac{-11 + 5}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = \frac{-11 - 5}{-8} = \frac{16}{8} = 2$$



Factorisation de $-4x^2 + 11x - 6$:

$$-4x^2 + 11x - 6 = (-4) \times (x - 2)(x - 0{,}75)$$

Etude du signe de $-4x^2 + 11x - 6$:

x	$-\infty$		0,75		2		$+\infty$
$(x - 2)$		–		–	0	+	
$(x - 0{,}75)$		–	0	+		+	
$(x - 2)(x - 0{,}75)$		+	0	–	0	+	
$(-4) \times (x - 2)(x - 0{,}4)$		–	0	+	0	–	

$-4x^2 + 11x - 6$ positif (> 0) pour $x \in [0{,}75 ; 2]$

$-4x^2 + 11x - 6$ négatif (< 0) pour $x \in]-\infty ; 0{,}75[\cup]2 ; +\infty[$