

# Remboursement d'emprunt et capitalisation

## I. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes (Annuités payables en fin d'année)

Valeur actuelle  $V_0$  au taux d'actualisation «  $t$  » d'une suite d'annuités constantes «  $a$  » versées à la fin de chaque année :

Rang de l'année de versement de l'annuité	Nombre d'années d'actualisation : $n$	Valeur actuelle de l'annuité
1	1	$a(1+t)^{-1}$
2	2	$a(1+t)^{-2}$
...	...	...
...	...	...
$n-1$	$n-1$	$a(1+t)^{-(n-1)}$
$n$	$n$	$a(1+t)^{-n}$
		$a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \dots + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$

La valeur actuelle  $V_0$  de cette suite d'annuités est donc égale à la somme des valeurs actuelles de chaque annuité, ce qui correspond à la somme des  $n$  termes d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme «  $a(1+t)^{-n}$  » et de raison «  $(1+t)$  » :

Rappel : somme des  $n$  termes d'une suite géométrique :  $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

On a donc :  $V_0 = a(1+t)^{-n} \frac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = a \frac{(1+t)^{-n-1}}{1-1-t} = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

Soit  $V_0 = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

## II. Valeurs acquises par une suite d'annuités constantes

Valeur acquise  $V_n$  d'une suite d'annuités constantes «  $a$  » versées à la fin de chaque année pendant  $n$  années et placées à intérêts composés au taux «  $t$  » :

Rang de l'année de versement	Nombre d'années de capitalisation : $n$	Valeur acquise par chaque annuité
1	$n-1$	$a(1+t)^{n-1}$
2	$n-2$	$a(1+t)^{n-2}$
...	...	...
...	...	...
$n-1$	1	$a(1+t)$
$n$	0	$a$
		$a + a(1+t) + \dots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$

La valeur acquise  $V_n$  par cette suite d'annuités est donc égale à la somme des valeurs acquises par chaque annuité, ce qui correspond à la somme des  $n$  termes d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme «  $a$  » et de raison «  $(1+t)$  » :

Rappel : somme des  $n$  termes d'une suite géométrique :  $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

On a donc :  $V_n = a \frac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$

Soit  $V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$